

# Aspectos enumerativos de las foliaciones holomorfas.

Viviana Ferrer & Israel Vainsencher

Lima, Peru

2010

La teoría de foliaciones holomorfas tiene sus raíces en el estudio de sistemas de ecuaciones diferenciales con coeficientes polinomiales. Como en los comienzos de la geometría algebraica clásica, cuando el interés estaba centrado en ecuaciones específicas de curvas o superficies particulares, en los comienzos de 1900, Painlevé consiguió una clasificación detallada de las ecuaciones de la forma

$$y'' = R(y', y, t)$$

donde  $R$  es una función racional. En ambas disciplinas, así como en otras áreas de la matemática, en la última mitad del siglo el foco ha cambiado hacia problemas que conciernen comportamientos globales de los objetos en consideración. Entonces, los matemáticos se han interesado en espacios de métricas Riemannianas, estructuras holomorfas, o foliaciones con invariantes discretos preestablecidos. Aspectos globales de las foliaciones holomorfas han sido estudiados recientemente en especial en relación con problemas de entender la geometría del espacio  $F(k, n, d)$  de foliaciones holomorfas de dimensión  $k$  y grado  $d$  en  $\mathbb{P}^n$ . Gracias al trabajo de mucha gente (e.g., Jouanolou, Cerveau, Lins Neto, Pereira, Cukierman, Calvo-Andrade, Gomez-Mont), se conocen algunas de las componentes irreducibles de  $F(n-1, n, d)$ . Pero aún para las componentes conocidas, cuestiones básicas como determinar su grado continúan fuera del alcance con las técnicas actuales.

Para foliaciones de dimensión uno, el espacio de parámetros  $F(1, n, d)$  es un espacio proyectivo. Es esencial aquí la ausencia de hojas algebraicas para la mayoría de las foliaciones en este espacio. También se conoce el tipo de singularidades que presenta una foliación genérica.

El objetivo de este curso es introducir técnicas y discutir ejemplos referentes a ciertas subvariedades de  $F(1, n, d)$ , definidas por la imposición de comportamientos especiales en la foliación. Por ejemplo, nos podemos preguntar por el grado de la subvariedad formada por las foliaciones que tienen singularidad de cierto tipo (no genérico). En el mismo espíritu, queremos determinar dimensión y grado de la subvariedad formada por foliaciones que tienen un  $k$ -plano invariante, o una bandera de subespacios de  $\mathbb{P}^n$  invariantes, o una cónica invariante...

El contenido detallado del curso es el siguiente:

## 1. Teoría de Intersección en Espacios Proyectivos y Grassmannianas.

Ciclos y equivalencia racional. Grupo de Chow de una variedad. Grupos de Chow de  $\mathbb{A}^n$  y  $\mathbb{P}^n$ . Divisores de Cartier y fibrados en rectas. Intersección con divisores. Clases de Chern de un fibrado en rectas. Clases de Segre y Chern asociadas a un fibrado vectorial. Teoría de Intersección en Grassmannianas.

## 2. Foliaciones holomorfas en Espacios Proyectivos.

Fibrados tangente y cotangente de  $\mathbb{P}^n$ . Sucesión de Euler. Foliaciones de dimensión uno en  $\mathbb{P}^n$ . Grado de una foliación. Expresión local de campos y formas. Conjunto singular de una foliación. Degeneración de singularidades. Subvariedades algebraicas invariantes por una foliación.

### 3. Subvariedades del espacio de foliaciones.

Foliaciones de grado uno en  $\mathbb{P}^2$  y su correspondencia con  $sl_3(\mathbb{C})$ . Grado del estrato definido por degeneraciones de singularidades. Grado del estrato determinado por degeneración de singularidades para foliaciones de grado  $d$  en  $\mathbb{P}^2$ . La subvariedad de foliaciones en  $\mathbb{P}^2$  con singularidad dicrítica de orden  $r$ . La subvariedad de foliaciones de dimensión uno y grado  $d$  en  $\mathbb{P}^n$  con  $k$ -plano invariante. La subvariedad de foliaciones de dimensión uno y grado  $d$  en  $\mathbb{P}^n$  con una bandera de subespacios de  $\mathbb{P}^n$  invariante. La subvariedad de foliaciones de dimensión uno y grado  $d$  en  $\mathbb{P}^2$  con cónica invariante (hipersuperficie de grado  $r$  invariante). Ecuaciones de segunda orden. Problemas abiertos.